2. LIMITES

2.1. CONCEITO DE LIMITE

Limite é um conceito matemático que consideram o comportamento de uma função à medida que seu argumento (isto é, a variável) se aproxima de um determinado valor. Tomemos como exemplo a função f(x) = 2x + 1. Se tabelarmos alguns valores desta função para x se aproximando de 1, teremos algo assim:

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,99	0,999	0,9999
f(x)	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	2,8	2,98	2,998	2,9998

Note que à medida que x se aproxima de 1 o valor da função está claramente se aproximando de 3. A aproximação pode ser tão pequena quanto quisermos. Neste caso dizemos que o **limite de f(x) = 2x + 1 quando x tende a 1 é 3**. Em notação matemática escrevemos

$$\lim_{x \to 1} 2x + 1 = 3$$

O símbolo "lim" indica limite e a seta indica o valor do qual fazemos a variável x se aproximar. Note que para a função exemplo se verifica que f(1) = 3; no entanto, é muito importante frisar que o limite, cujo valor neste caso é 3, **NÃO É** o valor de f(x) quando x = 1, mas sim **o valor para o qual a função tende** (isto é, do qual se aproxima) quando sua variável tende a 1.

Exercícios resolvido:

a) Determine o valor de $\lim_{x \to 1} x+1$

Resolução:

Quando $x \to 1$ (x tende a 1 ou x se aproxima de 1), claramente $(x+1) \to 2$ (x + 1 tende a 2, ou x + 1 se aproxima de 2). Logo

$$\lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

b) Determine o valor de $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$

Resolução:

A função em questão é racional, sendo a razão de duas expressões polinomiais. Note que quando $x \to 1$, claramente $(x-1) \to 0$, isto é, o denominador tende a zero. Nesta situação não podemos determinar o limite com clareza (embora o numerador também tenda a zero). Devemos então encontrar uma função equivalente à original de modo que o valor do limite seja óbvio. O numerador é uma diferença de quadrados que pode ser fatorada; assim, temos:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

Observação importante: As funções $\frac{x^2-1}{x-1}$ e x + 1 são equivalentes, mas somente para valores de x diferentes de 1. Quando x = 1, elas são diferentes, pois para esse valor a função racional não está definida, já que há divisão por zero. No caso do limite, podemos substituir uma pela outra sem problemas pois não estamos lidando com a situação em que a variável x atinge o valor 1, mas apenas se aproxima dele.

2.2. PROPRIEDADES DOS LIMITES

As principais propriedades dos limites são:

a) o limite da soma (ou da diferença) é a soma (ou a diferença) dos limites:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 2}(3x^2+2x-1) = \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2} 2x - \lim_{x\to 2} 1 = 12 + 4 - 1 = 15$$

Nota: o limite de uma função constante é a própria constante.

b) o limite do produto é o produto dos limites:

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to\pi}(3x^2\cos x) = \left(\lim_{x\to\pi} 3x^2\right)\left(\lim_{x\to\pi}\cos x\right) = 3\pi^2\cos(\pi) = 3\pi^2(-1) = -3\pi^2$$

c) o limite da razão é a razão dos limites:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$, desde que o denominador não seja zero.

Exemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x^2-1} = \frac{\lim_{x\to 0}\cos(x)}{\lim_{x\to 0}(x^2-1)} = \frac{\cos(0)}{0^2-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

d) o limite da potência é a potência do limite:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$$, com n inteiro

Exemplo:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 1)^2 = \left(\lim_{x \to 2} (x^2 - 1)\right)^2 = (4 - 1)^2 = (3)^2 = 9$$

e) o limite da raiz é a raiz do limite:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$, com n inteiro (o radicando deve ser positivo se n for par)

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{4x^2 + 5x} = \sqrt{\lim_{x \to 1} (4x^2 + 5x)} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

f) o limite do logaritmo é o logaritmo do limite:

$$\lim_{x \to a} [\ln f(x)] = \ln\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$$, desde que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

Exemplo:

$$\lim_{x \to e} (\ln x^3) = \ln\left(\lim_{x \to e} x^3\right) = \ln(e^3) = 3 \ln e = 3.1 = 3$$

Nota: e é uma constante matemática (aproximadamente 2,718), ln e = 1 e ln x^n = n ln x.

g) o limite do seno é o seno do limite:

$$\lim_{x \to a} [sen\, f(x)] = sen\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} [sen(x^2 + \pi)] = sen\left[\lim_{x \to 0} (x^2 + \pi)\right] = sen[0 + \pi] = sen[\pi] = 0$$

h) o limite da exponencial é a exponencial do limite:

$$\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} e^{2x^3 - 3x^2} = e^{\lim_{x \to 1} (2x^3 - 3x^2)} = e^{(2-3)} = e^{-3} = 1/e^3$$